

# Cœurs dynamiques

Formation MODélisation NUMérique de l'Océan et de l'Atmosphère

Brest, 27-31 mars 2023

[Laurent.Debreu@inria.fr](mailto:Laurent.Debreu@inria.fr)

# Plan

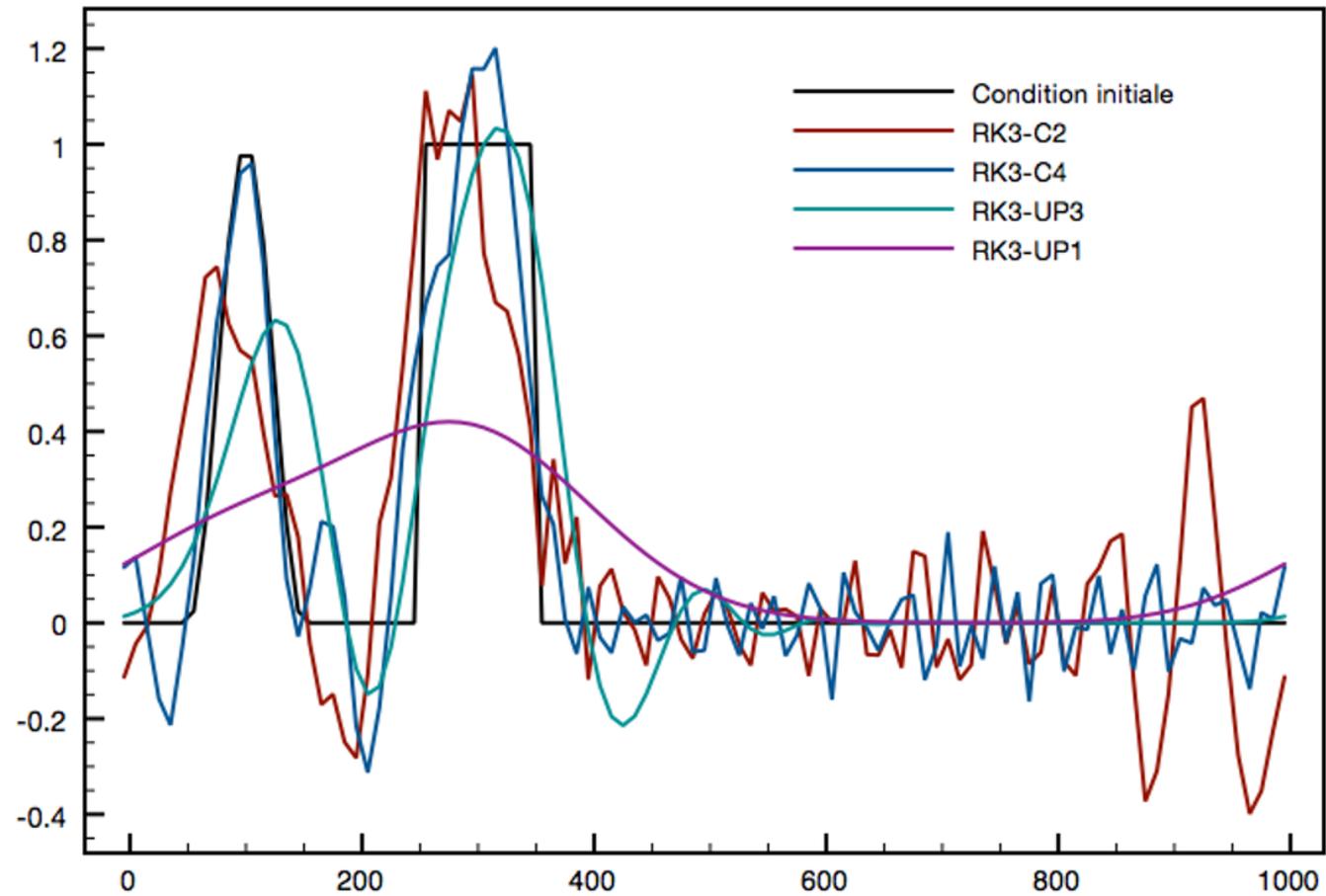
1. **Transport**
  - i. Propriétés de monotonie
  - ii. Schémas semi-lagrangien
2. **Schémas temporels : cas des systèmes**
  - i. Système shallow water
3. **Diffusion**
4. **Systèmes raides**

# Transport

# Propriétés de monotonie

# Propriétés de monotonie

Equation d'advection, schéma temporel : RK3



## Monotonie et non-linéarités

Equation de Burgers non visqueuse :  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$

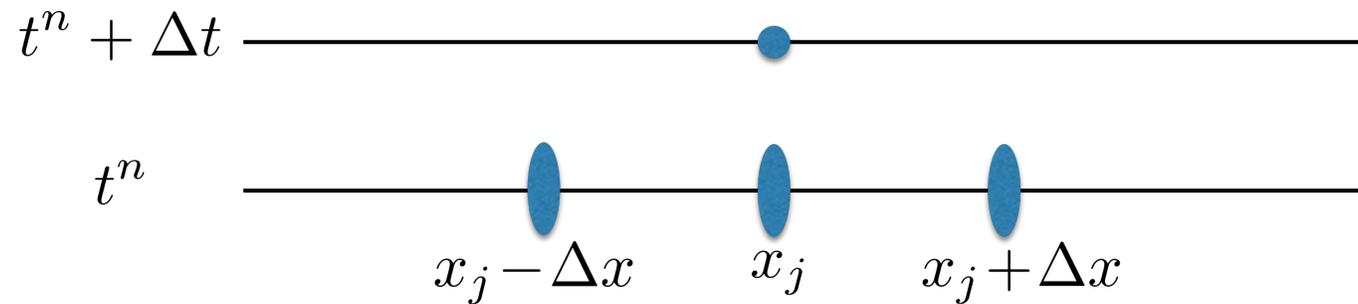
Limite de l'équation de Burgers visqueuse  $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\epsilon^2}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2}$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$

➔ Si les gradients sont forts, le terme visqueux ne peut pas être négligé (même si  $\epsilon$  est petit).

Utilisation de schémas numériques qui incluent une dissipation numérique forte proche des forts gradients

# Propriétés de monotonie : conditions

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



Upwind range conditions (pour  $c\Delta t \leq \Delta x$  (i.e.  $\mu \leq 1$ ))

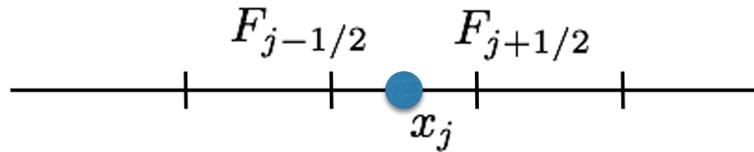
$$\min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j-1}^n) \text{ si } c > 0$$

$$\min(u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j+1}^n) \text{ si } c < 0$$

Implique la positivité (maximum discret)

# Approche TVD (Total Variation Diminishing)

# Propriétés de monotonie : Suppression de la création des extremas



$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

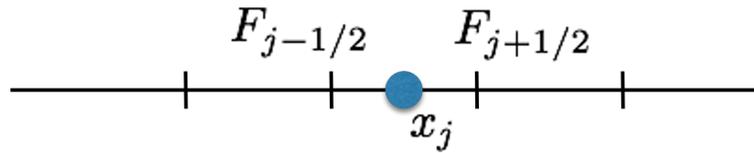
Euler amont  $F_{j+1/2} = c u_j^n$

$$\rightarrow u_j^{n+1} = \mu u_{j-1}^n + (1 - \mu) u_j^n, \quad \mu = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Si  $\mu \leq 1$ , alors  $\min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j-1}^n)$  👍

Un schéma monotone linéaire (i.e. les "poids" du schéma ne dépendent pas de la solution numérique) est au plus d'ordre 1.

# Propriétés de monotonie : Suppression de la création des extremas



$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

Lax-Wendroff  $F_{j+1/2} = c u_j^n + c \frac{1}{2} (1 - \mu) (u_{j+1}^n - u_j^n)$  (ordre 2 en espace *et* en temps)

➡  $u_j^{n+1} = \frac{\mu}{2} (1 + \mu) u_{j-1}^n + (1 - \mu) u_j^n - \frac{\mu}{2} (1 - \mu) u_{j+1}^n$  🙄

## Propriétés de monotonie : Limiteur de flux

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$$

Lax Wendroff modifié :  $F_{j+1/2} = c u_j^n + \phi_j^n c \frac{1}{2} (1 - \mu) (u_{j+1}^n - u_j^n)$ ,  $\phi_j^n$  limiteur de flux

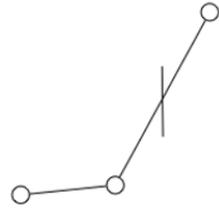
Après calculs ..., on peut écrire

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-1/2}^- (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$\text{où } C_{j-1/2}^- = \mu + \frac{\mu}{2} (1 - \mu) \left[ \frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \right]$$

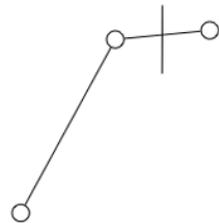
avec  $r_j^+ = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$  le ratio entre pente amont ( $c > 0$ ) et pente centrée

# Propriétés de monotonie

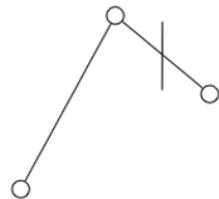


$0 < r_j \ll 1$   
risque de créer un minimum local

$$r_j^+ = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n}$$



$r_j \gg 1$   
risque de créer un maximum local



$r_j < 0$   
en présence d'un maximum local

$$u_j^{n+1} = u_j^n - C_{j-1/2}^-(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$\text{si } 0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1,$$

$$\text{alors } \min(u_j^n, u_{j-1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_j^n, u_{j-1}^n) \quad \text{👍}$$

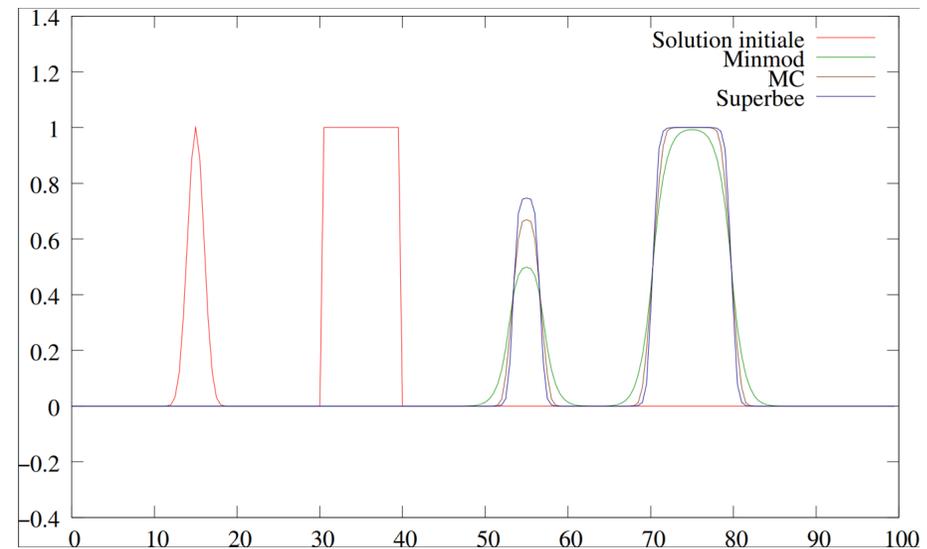
# Propriétés de monotonie

$$C_{j-1/2}^- = \mu + \frac{\mu}{2}(1 - \mu) \left[ \frac{\phi_j^n}{r_j^+} - \phi_{j-1}^n \right]$$

Plusieurs choix possibles de limiteurs :

$\phi(r)$  tel que  $0 \leq C_{j-1/2}^- \leq 1$

- mimmod  $\phi(r) = \minmod(1, r)$
- superbee  $\phi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r))$
- MC  $\phi(r) = \max(0, \min((1 + \theta)/2, 2, 2r))$
- Van Leer  $\phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$



# Propriétés de monotonie : autres approches

- TVD (Total Variation Diminishing)
- FCT (Flux Corrected Transport)
- ENO (Essentially Non Oscillatory)
- WENO (Weighted ENO)
- MP (Monotonicity Preserving)

# Schémas temporels préservant la monotonie : schémas SSP (Strong Stability Preserving)

Augmentation de l'ordre en temps

$$\text{RK2 SSP : } \begin{cases} u^1 = u^n + \Delta t F(u^n) \\ u^2 = u^1 + \Delta t F(u^1) \\ u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^2) \end{cases} \quad \text{RK3 SSP : } \begin{cases} u^1 = u^n + \Delta t F(u^n) \\ u^2 = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}(u^1 + \Delta t F(u^1)) \\ u^3 = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}(u^2 + \Delta t F(u^2)) \\ u^{n+1} = u^3 \end{cases}$$

Remarque : CFL plus contraignante :  $\omega \Delta t \leq 1$

# Schémas semi-lagrangien et schémas espace-temps

# Schémas couplés espace temps : dérivation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3} (\Delta t)^2 - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 q}{\partial t^4} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)^4$$

Expression des dérivées temporelles en fonction des dérivées spatiales  $\frac{\partial^p q}{\partial t^p} = (-c)^p \frac{\partial^p q}{\partial x^p}$

puis discrétisation des dérivées spatiales

➡ A l'ordre 2, on obtient le schéma Lax Wendroff.

## Avantages :

- Schémas stables pour  $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$
- Schémas exacts pour  $\mu = 1$
- 1 (seule) évaluation du second membre par pas de temps

# Schémas couplés espace-temps

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$q(x_j + t\Delta t) = q(x_j - c\Delta t, t)$$

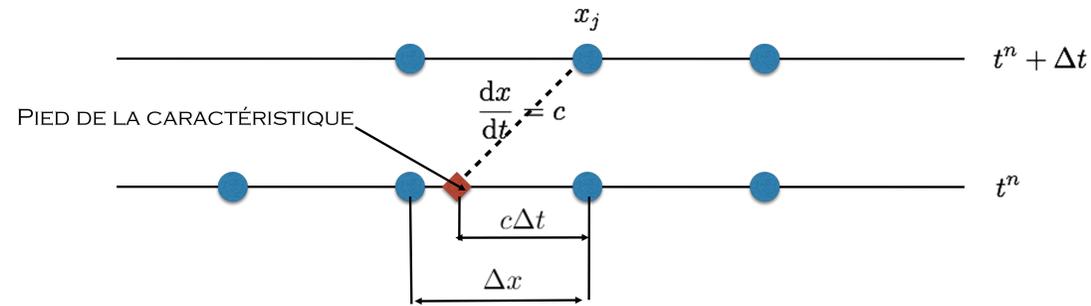


Schéma obtenu en fonction de l'interpolation au pied de la caractéristique :

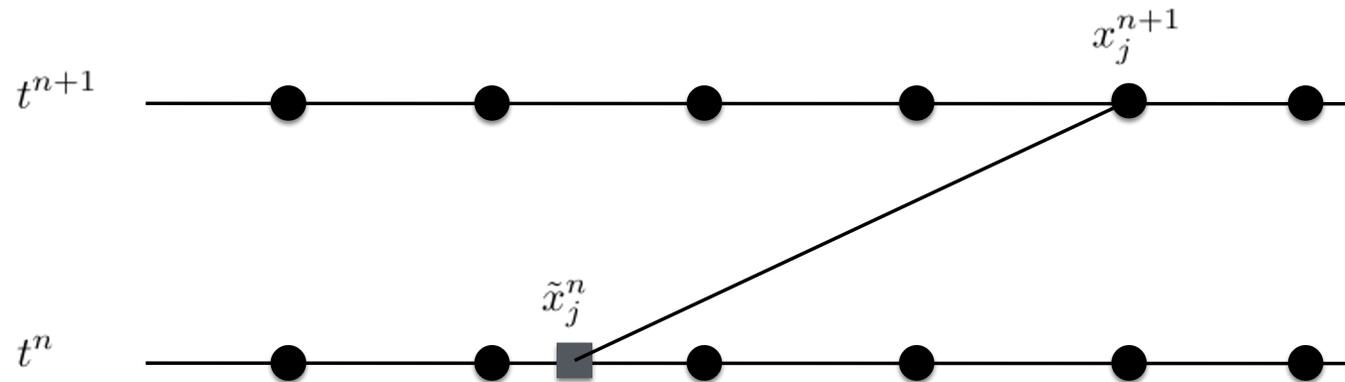
- Linéaire ➔ Euler amont
- Quadratique ➔ Lax-Wendroff :  $q_j^{n+1} = q_j^n - \mu \frac{q_{j+1}^n - q_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2}\mu^2 (q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n)$
- Quadratique décentré amont ➔ Beam et Warming

# Schémas semi-lagrangien : principe

Objectif : construire un schéma d'advection inconditionnellement stable

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \iff \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \text{ où } \frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

On écrit  $q(x_j^{n+1}, t^{n+1}) = q(\tilde{x}_j^n, t^n)$  où  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, t) \\ x(t^{n+1}) = x_j^{n+1} \end{cases}$  et  $\tilde{x}_j^n = x(t^n)$



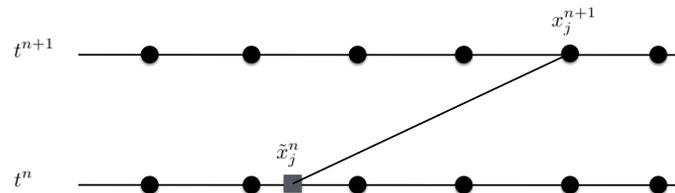
# Schémas semi-lagrangien : principe

A vitesse constante : trivial : 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, t) = c \\ x(t^{n+1}) = x_j^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - c\Delta t$$

Sinon, calcul de la trajectoire :

1. Ordre 1 :  $\tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u(x_j^{n+1}, t^n)\Delta t$

2. Ordre 2 (Extrapolation) : 
$$\begin{cases} x^* = x_j^{n+1} - u(x_j^{n+1}, t^n)\Delta t/2 \\ \tilde{x}_j^n = x_j^{n+1} - u(x^*, t^{n+1/2})\Delta t \end{cases} \text{ avec } u(t^{n+1/2}) = \frac{3}{2}u(t^n) - \frac{1}{2}u(t^{n-1})$$



A coupler avec interpolations monotones au pied de la caractéristique

Condition de stabilité : condition Lipschitz :  $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \Delta t \leq 1$  (i.e. les caractéristiques ne se croisent

pas ...)

# Schémas semi-lagrangien : principe en dim. > 1

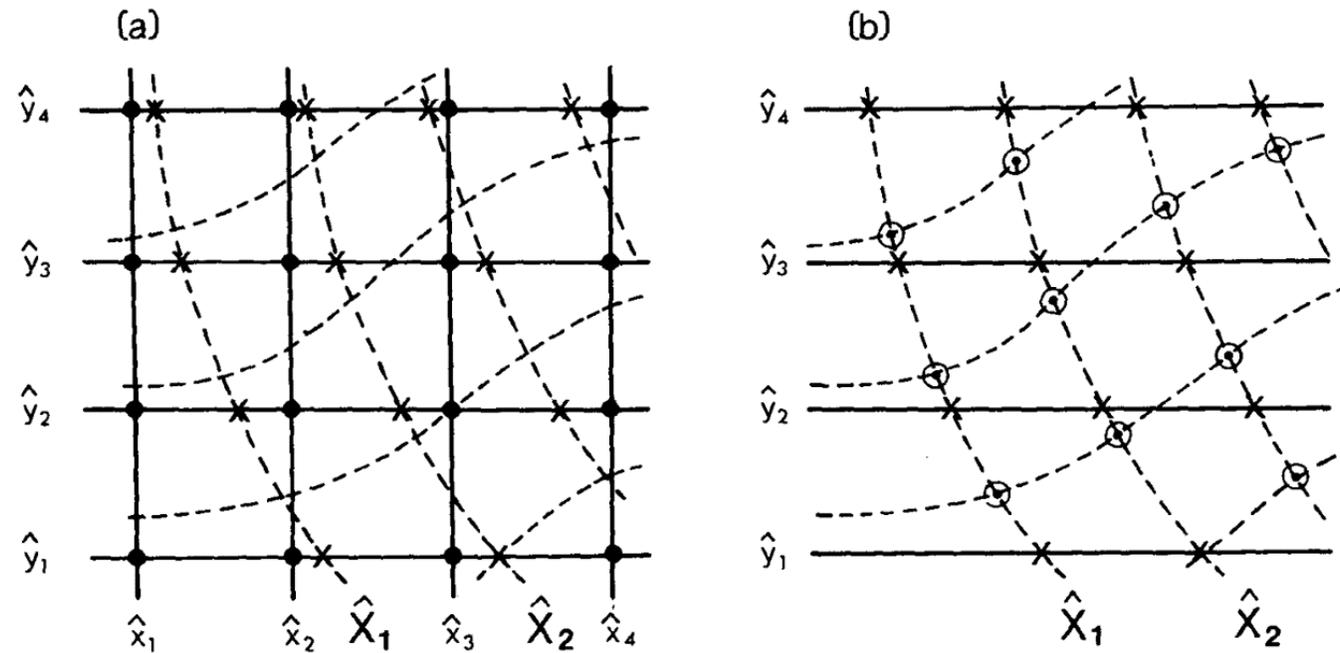


FIG. 2. Schematic illustration of a two-dimensional version of the cascade method of interpolating a generic variable  $\psi$  from model grid (solid lines) to Lagrangian grid (broken lines). (a) Having determined  $x(\hat{X}, \hat{y})$  by preliminary interpolation from  $x(\hat{X}, \hat{Y})$ ,  $\psi$  may be interpolated from nodes of the model grid, marked " $\bullet$ ", to values  $\psi(\hat{X}, \hat{y})$  on the hybrid grid, marked " $\times$ ". (b) This is followed by interpolation from  $\psi(\hat{X}, \hat{y})$  to values  $\psi(\hat{X}, \hat{Y})$  at the final target positions marked " $\odot$ ". All interpolations in the process are one-dimensional, requiring  $O(N)$  computations each.

*Purser and Leslie, 1991, MWR*

# Schémas semi-lagrangien : conservation

Les schémas précédents ne sont pas **conservatifs**

Mais versions conservatives possibles (complexes à implémenter en dim.  $> 1$ ).

1. CISL: *Cell Integrated Semi Lagrangian*. On transporte (en Lagrangien) les volumes.
2. *Lin and Rood, 2006*. Formulation volumes finis puis on transporte (en Lagrangien) les flux aux interfaces.

# Schémas temporels : cas des systèmes

# Systeme shallow water

# Système shallow water

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

- Discrétisation vitesses/pression
  - Shallow water
  - Internal gravity waves

Etude du schéma temporel sur un exemple (Euler Forward-Backward (EFB))

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\partial \eta^n}{\partial x} + H \frac{\partial u^n}{\partial x} = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\partial u^n}{\partial x} + g \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

→  $\begin{pmatrix} \eta^{n+1} \\ u^{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta^n \\ u^n \end{pmatrix}$  où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ikg\Delta t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - iu_0k\Delta t & -iHk\Delta t \\ 0 & 1 - iku_0\Delta t \end{pmatrix}$

# Systeme shallow water

Etude du schéma temporel sur un exemple (Euler Forward-Backward (EFB))

$$\begin{pmatrix} \eta^{n+1} \\ u^{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta^n \\ u^n \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ikg\Delta t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - iu_0k\Delta t & -iHk\Delta t \\ 0 & 1 - iku_0\Delta t \end{pmatrix}$$

$A$  matrice d'amplification (de gain). Le schéma est stable si  $\|A\|_2 \leq 1$  (en pratique approché par  $\rho(A) \leq 1$ ).

Si  $u_0 = 0$ , le schéma Euler Forward Backward est stable sous la condition (CFL)  $\omega\Delta t \leq 2$ , où  $\omega = k\sqrt{gH}$ .

Lorsque le schéma est stable, le schéma est **neutre** (pas de dissipation)

# Système shallow water

## Schéma Euler Forward

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\partial \eta^n}{\partial x} + H \frac{\partial u^n}{\partial x} = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u_0 \frac{\partial u^n}{\partial x} + g \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{Instable si } u_0 > 0$$

## Schéma Lagrangien

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^*}{\Delta t} + H \frac{\partial u^n}{\partial x} = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} + g \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \eta^* &= \eta^n(x - u_0 \Delta t), \quad u^* = u^n(x - u_0 \Delta t) \\ \text{condition de stabilité : } &k\sqrt{gH}\Delta t \leq 2 \end{aligned}$$

## Schéma semi-implicit semi-Lagrangien (SISL)

$$\begin{cases} \frac{\eta^{n+1} - \eta^*}{\Delta t} + H \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0 \\ \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} + g \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{Helmholtz : } &\eta^{n+1} - gH\Delta t^2 \Delta \eta^{n+1} = \eta_\star - H\Delta t \nabla \cdot u_\star \\ \text{Inconditionnellement stable} & \end{aligned}$$

## Euler VS semi-Lagrangien

- Efficacité VS précision/conservation
- Gain en robustesse
- Parallélisation ?

# Diffusion

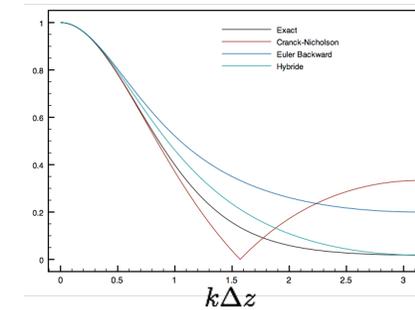
# Equation parabolique et schéma implicite

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \mathcal{K} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \quad \rightarrow \quad \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = \mathcal{K} \left[ (1 - \theta) \frac{\partial^2 q^n}{\partial z^2} + \theta \frac{\partial^2 q^{n+1}}{\partial z^2} \right]$$

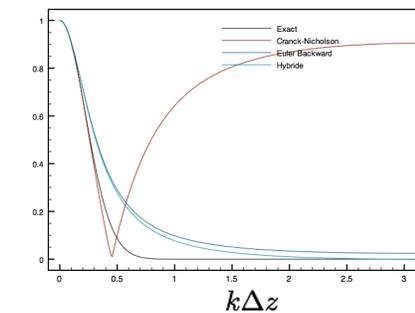
- En explicite ( $\theta = 0$ ), le schéma est stable si  $\mathcal{K} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq 1/2$ .
- $\theta = 1/2$  : Crank Nicholson
- $\theta = 1$  : Euler Backward

## Amortissement

$$\mathcal{K} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} = 1$$



$$\mathcal{K} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} = 10$$



# Equation parabolique et schéma implicite

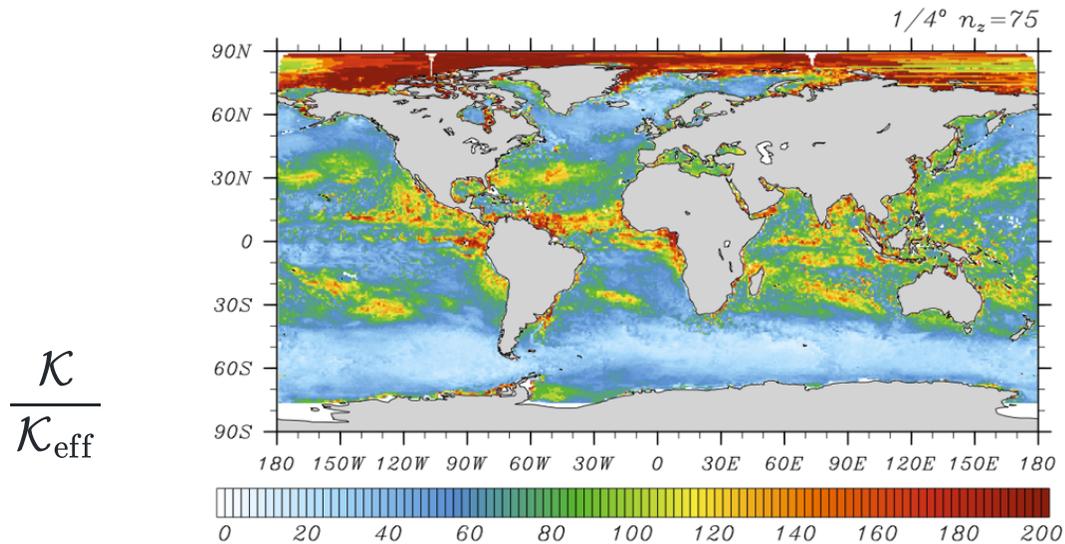


Figure 10: Ratio between the turbulent vertical diffusivity  $\kappa$  and the effective diffusivity  $\kappa^{\text{eff}}$  for each water column of the  $1/2^\circ$  (top) and the  $1/4^\circ$  (bottom) configurations.  $\kappa^{\text{eff}}$  is the diffusivity in the continuous equation which would give the same damping as the numerical damping (ideally we should get  $\kappa/\kappa^{\text{eff}} = 1$ ). Areas shaded in yellow and red indicate regions with large numerical errors in the computation of vertical diffusion. The value of  $\kappa/\kappa^{\text{eff}}$  is computed using (16) with  $\sigma^{(2)} = \bar{\sigma}^{(\text{mld})}$  the averaged value of the vertical parabolic Courant number in the mixed layer and  $\theta = 2\pi/N_{\text{mld}}$  with  $N_{\text{mld}}$  the number of grid points in the mixed layer.

# Systemes raidés

## Systemes raides: Methodes de splitting

	Ocean	Atmosphere
Acoustic waves $c_s$	1500	350
External gravity waves $\sqrt{gH}$	200	350
Internal gravity waves $NH$	3	100
Advection $U$	0.1	30

# Ocean (Boussinesq)

	Ocean
<del>Acoustic waves <math>c_s</math></del>	<del>1500</del>
External gravity waves $\sqrt{gH}$	200
Internal gravity waves $NH$	3
Advection $U$	0.1

- The CFL stability condition on the barotropic mode limits the time step  
 $\Delta t_{\text{ext}} < \Delta x / C_{\text{ext}}$  where  $C_{\text{ext}} = \sqrt{gH} + U_{e_{\text{max}}}$   
 $H = 4000\text{m}$ ,  $C_{\text{ext}} = 200 \text{ m/s}$ ,  $\Delta x = 1\text{km}$ ,  $\Delta t_{\text{ext}} < 5\text{s}$
- Baroclinic (internal) slow mode: (internal gravity wave phase speed + max advective velocity)  
 $C_{\text{in}} \approx 2\text{m/s} + U_{i_{\text{max}}}$ ,  $\Delta x = 1\text{km}$ ,  $\Delta t_{\text{in}} < 8\text{mn}$
- $\Delta t_{\text{in}} / \Delta t_{\text{ext}} \approx 60 - 100!$

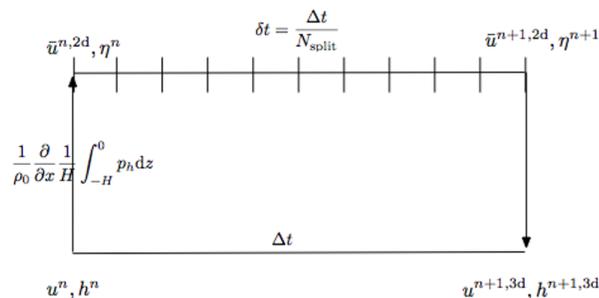
# Splitting barotrope / barocline

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{H} \int_{-H}^0 p_h dz \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{u}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Système 2D :  $\delta t$  CFL barotrope

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (V \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_0} \nabla_h p = 0 \\ \nabla \cdot V = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (V \cdot \nabla)\rho = 0 \end{cases}$$

Système 3D :  $\Delta t$  CFL barocline



$$u^{n+1,3d,c} = u^{n+1,3d} + \left[ \bar{u}^{n+1,2d} - \frac{1}{H} \int_z^0 u^{n+1,3d} \right]$$

# Atmosphere

	Ocean	Atmosphere
Acoustic waves $c_s$	1500	350
External gravity waves $\sqrt{gH}$	200	350
Internal gravity waves $NH$	3	100
Advection $U$	0.1	30

# Ondes acoustiques et filtrage temporel

- The Courant-Friedrichs-Lewy CFL stability condition on the acoustic waves limits the time step :  
 $c_s = 350\text{m.s}^{-1}$
- External - Internal gravity waves :  $c_g = 100 - 300\text{m.s}^{-1}$
- Advection :  $|U| \leq \frac{c_s}{12}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P = 0 \\ \epsilon_{\text{nh}} \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial z} = b \\ \epsilon_{\text{nb}} \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u = 0 \\ \frac{Db}{Dt} = 0 \end{array} \right.$$

# Filtrage des ondes acoustiques au niveau des équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P = 0 \\ \epsilon_{nh} \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial z} = b \\ \epsilon_{nb} \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u = 0 \\ \frac{Db}{Dt} = 0 \end{array} \right.$$

nb non Boussinesq, nh non hydrostatique

$\epsilon_{nb} = 1, \epsilon_{nh} = 1$  : pas de filtrage

$\epsilon_{nb} = 0, \epsilon_{nh} = 1$  : filtrage ondes acoustiques (requiert un solveur 3D pour la pression)

# Filtrage des ondes acoustiques au niveau des équations

$\epsilon_{nb} = 1, \epsilon_{nh} = 1$  : pas de filtrage

Non hydrostatique, compressible

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P = 0 \\ \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial z} = b \\ \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u = 0 \\ \frac{Db}{Dt} = 0 \end{array} \right.$$

## Traitement numérique : semi-implicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Du_h}{Dt} + \nabla_h P^{n+1} = 0 \\ \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial z} = b^n \\ \frac{DP}{Dt} + c_s^2 \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \\ \frac{Db}{Dt} = 0 \end{array} \right.$$

➔ Helmholtz :  $\Delta P^{n+1} - \frac{1}{(c_s \Delta t)^2} P^{n+1} = G$

## Traitement numérique : time-splitting

$$m = 1, \dots, N_s \quad \delta t = \Delta t / N_s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{m+1} - u^m}{\delta t} + \frac{\partial P^m}{\partial x} = -U \frac{\partial u^n}{\partial x} - w^n \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{w^{m+1} - w^m}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P^m + P^{m+1}}{2} - b^m \right) = b - U \frac{\partial w^n}{\partial x} \\ \frac{P^{m+1} - P^m}{\delta t} + c_s^2 \frac{u^{m+1}}{\partial x} + c_s^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w^m + w^{m+1}}{2} \right) = -U \frac{\partial P^n}{\partial s} \\ \frac{b^{m+1} - b^m}{\delta t} + N^2 w^{m+1} = -U \frac{\partial b^n}{\partial x} \end{array} \right.$$

# Références

- Durran : Numerical Methods for Fluid Dynamics With Applications to Geophysics, Second Edition, 2010, Springer
- Cushman-Roisin et Beckers, 2011: Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects, 2nd Edition, Academic Press
- Lauritzen P.H., Jablonowski C., Taylor M.A. and R.D. Nair, 2014: Numerical Techniques for Global Atmospheric Models. Springer. Lecture notes in computational science and engineering.
- Daru V. et C. Tenaud, 2005: Approximations d'ordre élevé pour les écoulements compressibles avec discontinuités. Ecole de printemps de Mécanique des Fluides Numérique, Roscoff, 2005.
- Laney, C.B. 1998: Computational Gasdynamics
- Kuzmin D., R. Löhner and S. Turek (Eds): Flux-Corrected Transport, Principles, Algorithms and Applications, Springer, 2005