

Coordonnées verticales

Formation MODélisation NUMérique de l'Océan et de l'Atmosphère

Brest, 27-31 mars 2023

Laurent.Debreu@inria.fr

Plan

1. **Coordonnées verticales généralisées**
 - i. Transformation des équations
 - ii. Eulérien VS Lagrangien
2. **Différents types de coordonnées verticales**

Coordonnées verticales généralisées

Coordonnées verticales généralisées : formulation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_z + u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_z + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_z + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_z + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_z + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Changement de variable $s = s(x, y, z, t)$

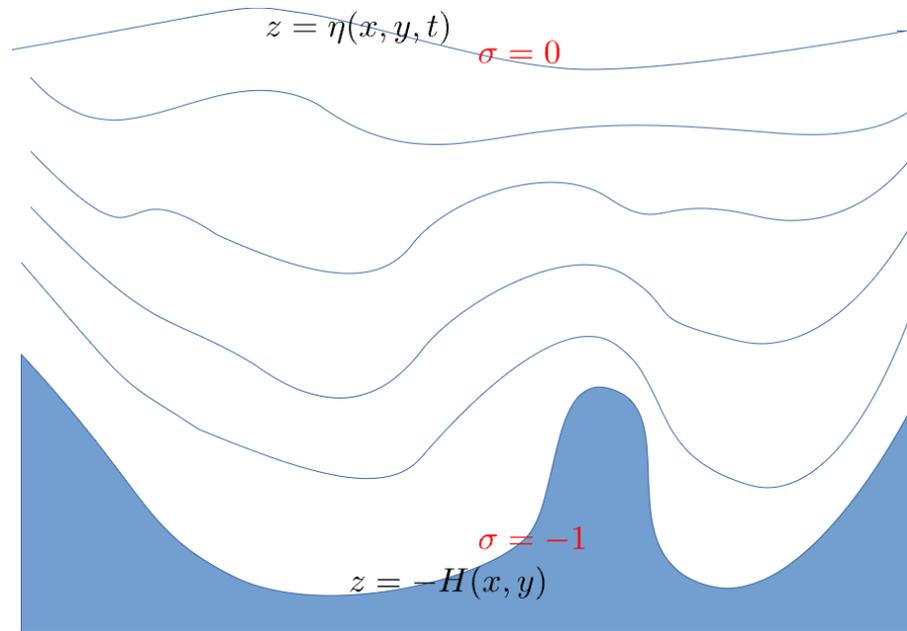
et on écrit pour toutes les variables :

$$\phi(x, y, z(x, y, s, t), t) = \tilde{\phi}(x, y, s(x, y, z, t), t)$$

Coordonnées verticales généralisées : formulation

Exemple : coordonnées suivi de terrain

$$s(x, y, z, t) = \frac{z - \eta(x, y, t)}{H(x, y) + \eta(x, y, t)}$$



Coordonnées verticales généralisées : formulation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_z + u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_z + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_z \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_z = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_z, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_z + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_z + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_z + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_z = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \Big|_s + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_s + u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \Big|_z + u \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_z + w \frac{\partial s}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial \rho}{\partial s} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \Big|_z + u \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_z + w \frac{\partial s}{\partial z} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Coordonnées verticales généralisées : formulation

$$\Omega = \left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_z + u \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_z + w \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \Omega \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0 \end{array} \right.$$

Coordonnées verticales généralisées : formulation

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_z = 0 = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}$$

Donc

$$\frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_s / \frac{\partial z}{\partial s} = - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_s / h \text{ avec } h = \frac{\partial z}{\partial s}$$

et de même

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_s / h$$

$$\text{Continuité : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} = 0$$

Coordonnées verticales généralisées : formulation

Equations primitives en coordonnées verticales généralisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho_0} h \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g h \\ \frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial hu\rho}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega\rho}{\partial s} = 0 \end{array} \right.$$

Eulérien VS Lagrangien

Coordonnées verticales généralisées : formulation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho_0} h \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} = -\rho gh \\ \frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial hu\rho}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega\rho}{\partial s} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Griffies et al, 2020, JAMES}$$

On spécifie la coordonnée verticale h

On spécifie la vitesse verticale Ω , e.g. $\Omega = 0$

On déduit la vitesse verticale Ω

On déduit l'évolution de la coordonnée verticale.

$$h\Omega = - \int_{s_{\text{bottom}}}^s \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$

Coordonnées verticales généralisées : formulation

Autres exemples :

- Epaisseurs de couches "cibles" : $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}(h - h_{\text{target}})$
- Epaisseurs de couches "cibles" + régularité : $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}(h - h_{\text{target}}) + \mu_h \Delta h$

Coordonnées verticales généralisées : formulation

Les épaisseurs de couches peuvent devenir (très) petites

- → Contraintes sur le pas de temps
- → Utilisation de schémas semi-lagrangiens (conservatifs) sur la direction verticale

Différents types de coordonnées verticales

Différents types de coordonnées verticales



Quelques questions (I) :

- Est-ce que la bathymétrie est bien représentée ? (couche limite de fond)
- Est-ce que la couche de mélange est bien représentée ?
- Est-ce que dans l'océan intérieur, il n'y a pas trop de mélange diapycnal purement numérique ? (lié au non alignement des couches avec les isopycnes)

Différents types de coordonnées verticales



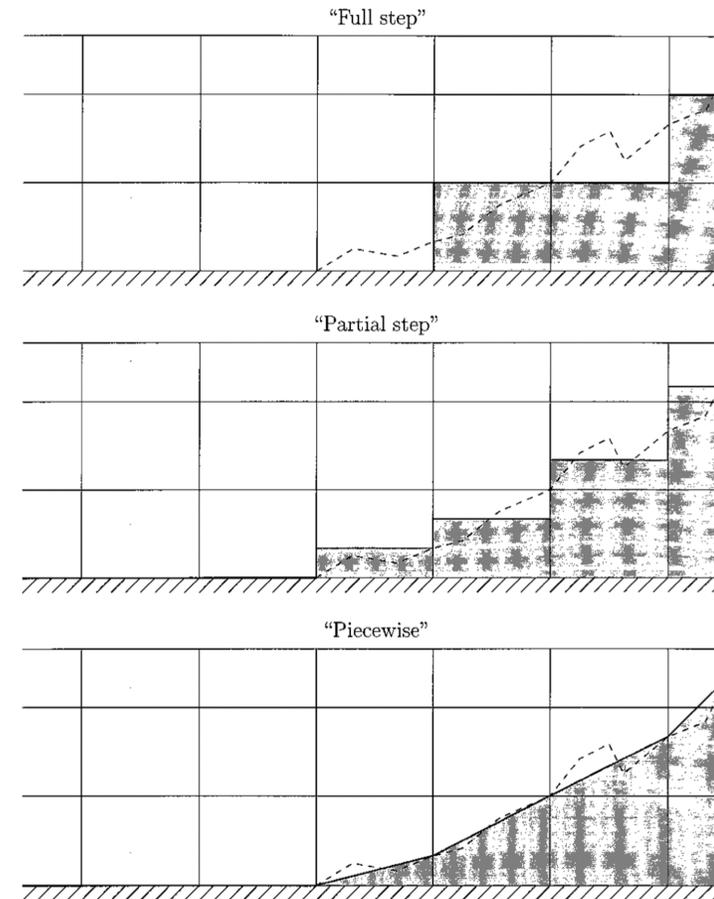
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho_0} h \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} = -\rho gh \\ \frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial hu\rho}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega\rho}{\partial s} = 0 \end{array} \right.$$

Quelques questions (II) :

- Est-ce que le gradient de pression horizontal est bien estimé ? (Est-ce qu'une stratification neutre reste au repos ?)
- Dans le cas non hydrostatique (solveur de Poisson pour la pression), est-ce que la matrice est bien conditionnée ?

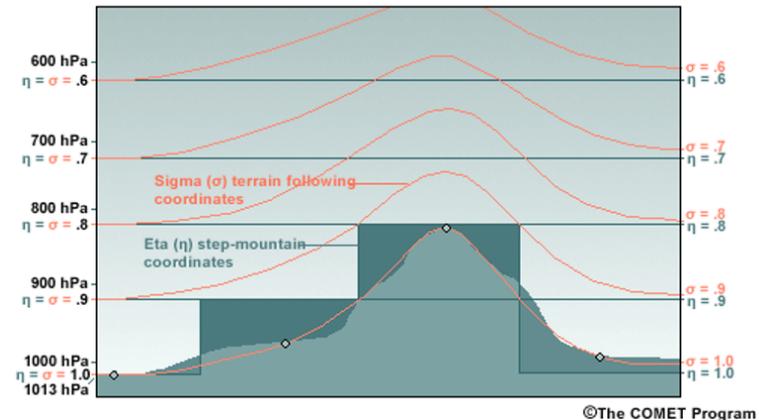
Coordonnées géopotentielles

- Avantages :
 - Calcul du gradient (horizontal) de pression (un seul terme)
- Inconvénients :
 - Diffusion diapycnale
 - Représentation du fond
 - Points masqués (perte d'efficacité)
- Améliorations :
 - Partial cells
 - Shaved cells (Adcroft et al, 1997, MWR)



Coordonnées suivi de terrain σ

- Avantages :
 - Condition à la limite au fond
 - Tous les points de calcul sont en mer
- Inconvénients :
 - Calcul du gradient de pression
 - Diffusion diapycnale
 - Système elliptique non hydrostatique



Calcul du gradient de pression

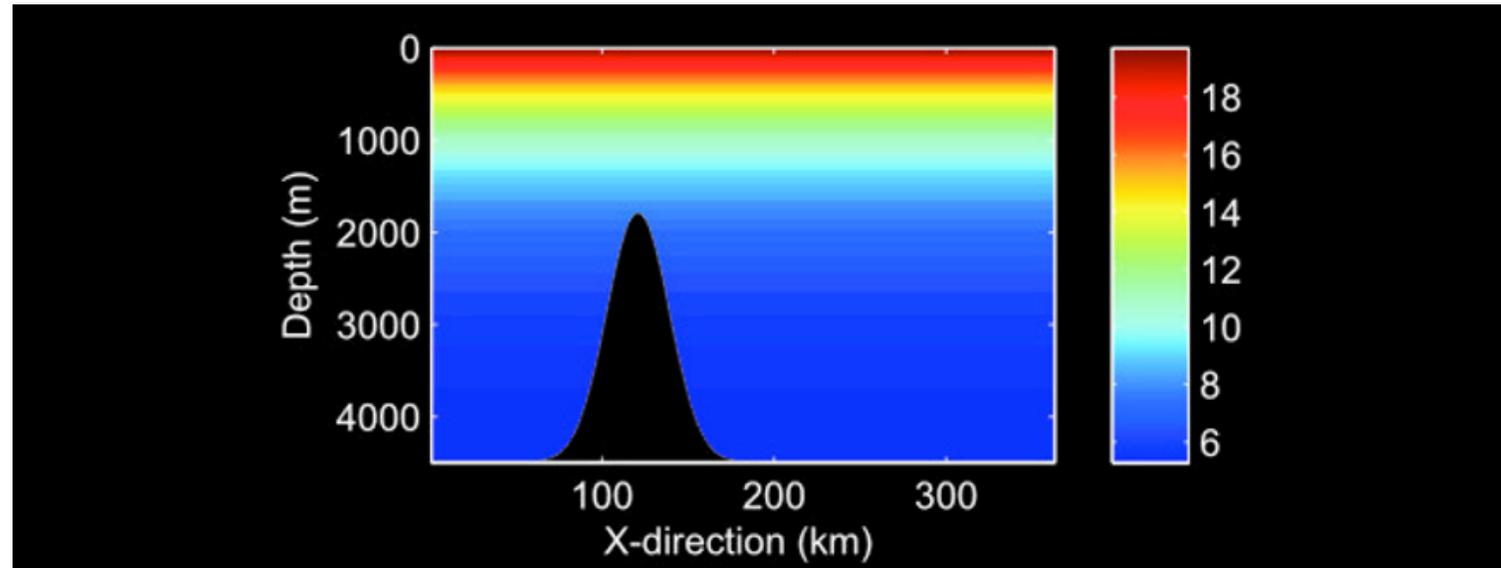
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho_0} h \left[\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_s + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g h \\ \frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial hu\rho}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega\rho}{\partial s} = 0 \end{array} \right.$$

Gradient de pression : somme de deux termes

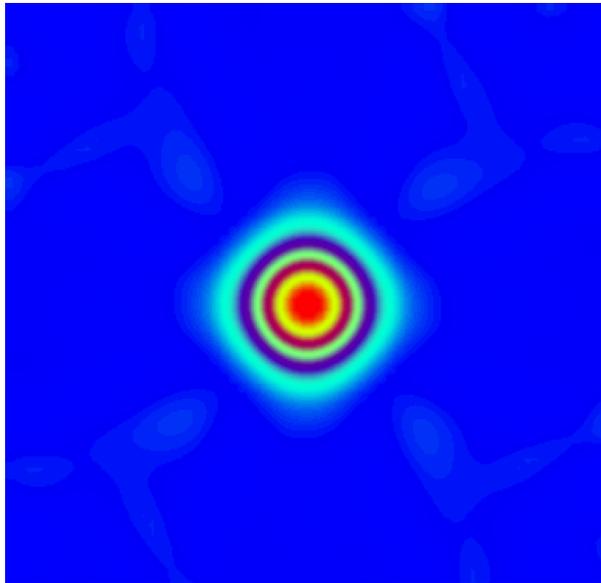
En particulier, si $\rho(x, y, z, t) = \rho(z)$ (stratification neutre), le gradient horizontal (numérique) de pression est non nul.

Calcul du gradient de pression

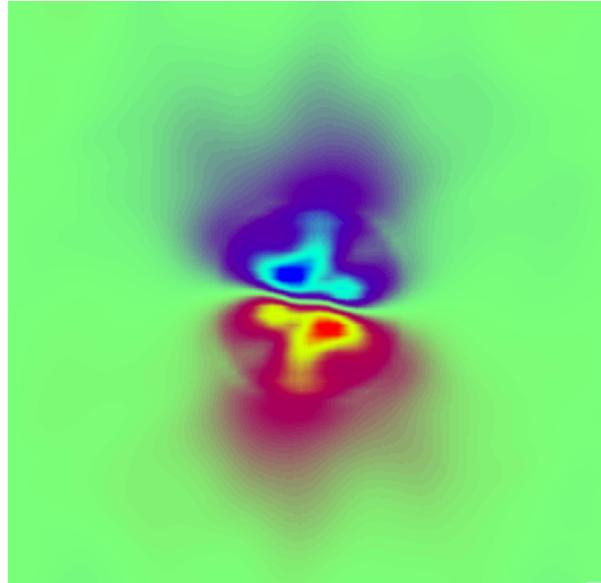
Stratification neutre - coordonnées sigma. Test du mont sous-marin



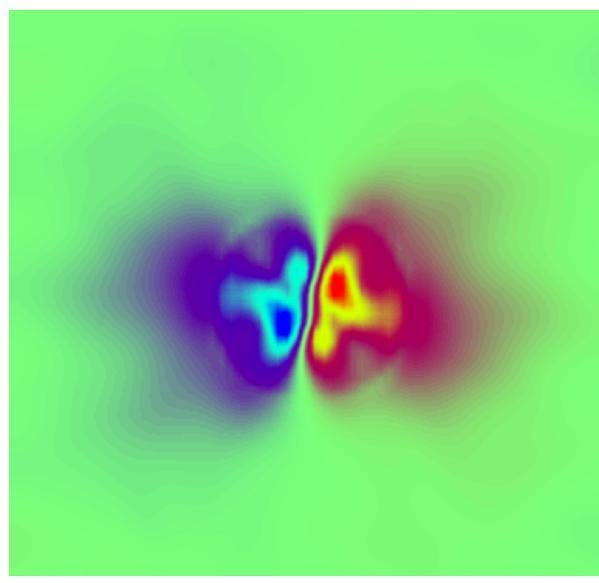
Calcul du gradient de pression



Elévation de surface η



Courants barotropes u, v

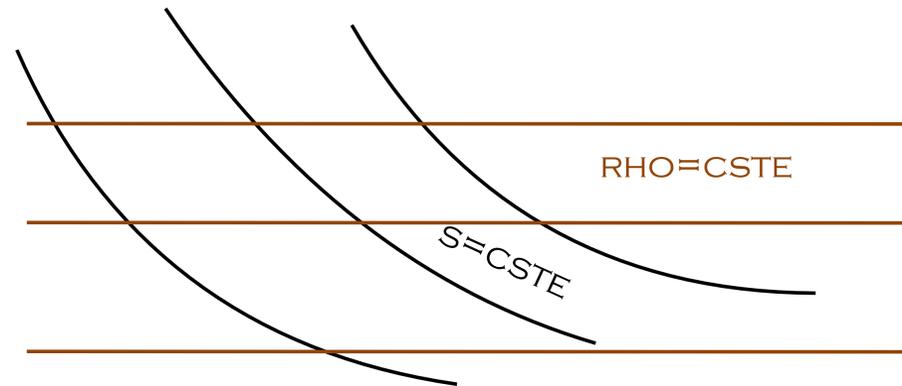


Solution pragmatique : lissage de la bathymétrie ...

Diffusion diapycnale artificielle

Utilisation de schémas « horizontaux » d'advection (de traceurs) diffusifs (décentrés)

➔ La diffusion a lieu le long des couches du modèle

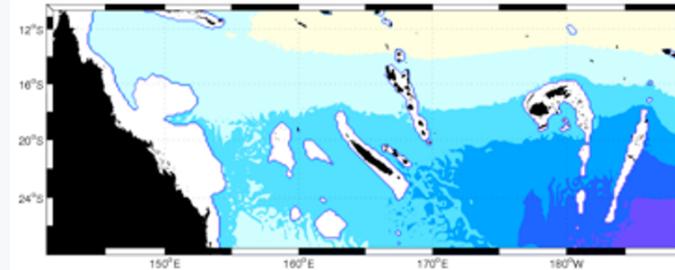


Diffusion diapycnale artificielle

Marchesiello et al, 2009, Ocean Modelling

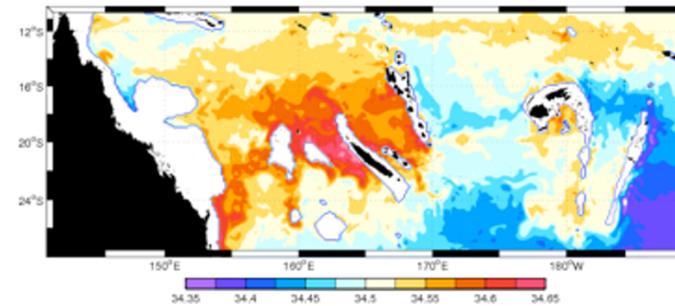
Salinité à 1000m de profondeur

Climatologie



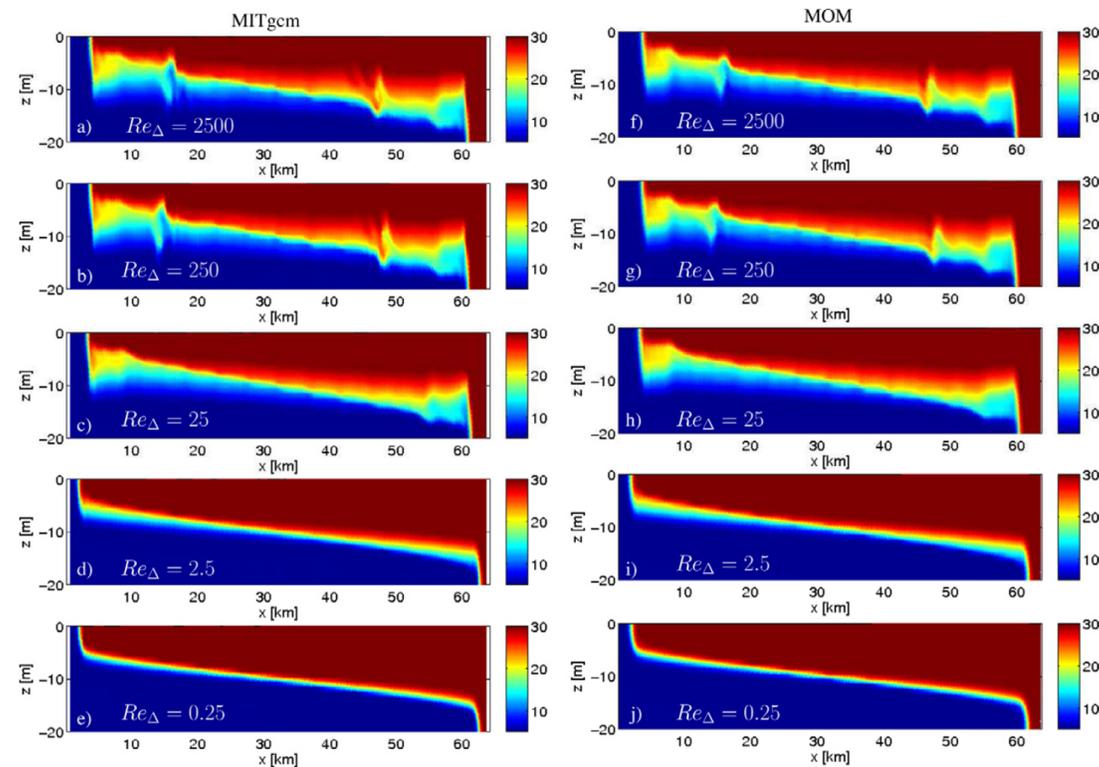
ROMS

Advection : décentré 3ème ordre (UP3)



Diffusion diapycnale artificielle : impact de la viscosité (explicite ou implicite au schéma d'advection)

Cas test lock exchange à différents nombres de Reynolds



Coordonnées ztilde \tilde{z} (NEMO, MPAS-O)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega u}{\partial s} = -\frac{1}{\rho_0} h \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g h \\ \frac{\partial h\rho}{\partial t} + \frac{\partial hu\rho}{\partial x} + \frac{\partial h\Omega\rho}{\partial s} = 0 \end{array} \right.$$

Objectif : éliminer les hautes fréquences de la vitesse verticale Ω .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\tilde{D}, \quad D = \frac{\partial hu}{\partial x}$$

\tilde{D} composante haute fréquence de la divergence horizontale D

Leclair et Madec, 2011, Ocean Modelling